Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023

Barem de corectare și notare - clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Să se determine $[\boldsymbol{x}]$ dacă $\boldsymbol{x}=\left(\frac{9}{2\sqrt{3}}-\frac{8}{3\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $\boldsymbol{x}$.

b) Determinați valoarea expresiei $E(x)=2\cdot\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$, știind că $1<x<\sqrt{2}$

Soluție cu barem.

a) $\boldsymbol{x}=\left(\frac{9}{2\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{18}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(6\sqrt{6}\right)=\frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{6}\cdot6\sqrt{6}=27\sqrt{2}-16\sqrt{3}$ . . . . 1 p

$27\sqrt{2}=\sqrt{1458}$ și $38=\sqrt{1444}<\sqrt{1458}<\sqrt{1521}=39$

$16\sqrt{3}=\sqrt{768}$ și $27=\sqrt{729}<\sqrt{768}<\sqrt{784}=28$ . . . . 1 p

Se obține $10<27\sqrt{2}-16\sqrt{3}<11$ pentru că $\{27\sqrt{2}\}<\{16\sqrt{3}\}$, deci $[x]=10$ . . . . 1 p

b) Dacă $1<x<\sqrt{2}$ avem că $2<2x<2\sqrt{2}$ după care: $x-\sqrt{2}<0$ și $2x-\sqrt{3}>0$ . . . . 1 p

$E(x)=2\cdot\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=2\cdot\left|x-\sqrt{2}\right|+\left|2x-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$ . . . . 2 p

$E(x)=2\sqrt{2}-2x+2x-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ . . . . 1 p

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$xyz-6x+3y-2z=3xy-2xz+yz+2023$$

Soluție cu barem.

$xyz+2xz-6x-3xy+3y-yz-2z+6=2023+6\Leftrightarrow$ . . . . 1 p

$xz(y+2)-3x(y+2)-y(z-3)-2(z-3)=2029$ . . . . 1 p

$x(y+2)(z-3)-(z-3)(y+2)=2029\Leftrightarrow(x-1)(y+2)(z-3)=2029$ . . . . 1 p

iar $\mathcal{D}_{2029}=\{1,2029\}$ . . . . 1 p

Cum x,y,z sunt numere naturale avem că $x-1\geq-1$, $y+2\geq2$ și $z-3\geq-3$

Astfel avem $2029=1\cdot1\cdot2029=(-1)\cdot(-1)\cdot2029$ . . . . 1 p

$y+2=2029\Rightarrow y=2027$

$x-1=1$ și $z-3=1$ de unde $x=2$ și $z=4$

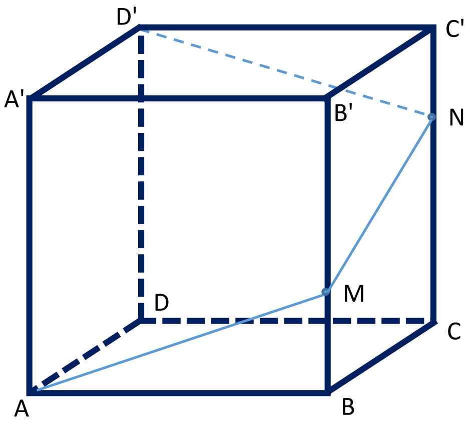
$x-1=-1$ și $z-3=-1$ de unde $x=0$ și $z=2$ . . . . 1 p

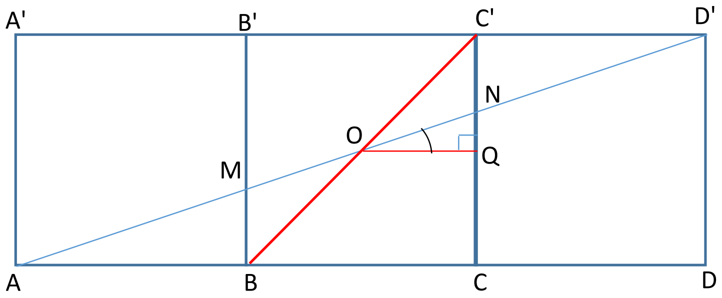
Obținem soluțiile: $(x,y,z)\in\{(2,2027,4),(0,2027,2)\}$ . . . . 1 p

Problema 3.

Fie cubul *ABCDA'B'C'D'*. Pe muchiile $[BB']$ și $[CC']$ considerăm punctele *M* și *N* astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Dacă $MN = 2\sqrt{10}$ cm, calculați sinusul unghiului determinat de dreptele *MN* și *AD*.

Soluție cu barem.





Dreptele AD și MN sunt necoplanare. . . . . 1 p

Cum $AD \parallel BC \Rightarrow \left(\widehat{AD;MN}\right) = \left(\widehat{BC;MN}\right) = (\widehat{OQ,MN}) = \widehat{NOQ}$,

unde $\{O\} = MN \cap BC'$ și $OQ \perp CC'$.

Suma $AM + MN + ND'$ minimă, utilizată pe desfășurarea laterală conduce la coliniaritatea punctelor *A, M, N* și *D'* . . . . 1 p

AA', BB', CC' și DD' sunt paralele echidistante, astfel că $AM = MN = ND' = 2\sqrt{10}$ cm . . . . 1 p

Avem și: $MB = \frac{1}{3}BB'$ și $NC = \frac{2}{3}CC'$. . . . . 1 p

Se determină lungimea muchiei cubului din $\triangle NC'D'$:

dacă $C'D' = 3x$, atunci $C'N = x$ și avem că $9x^2 + x^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$ de unde $x = 2$

iar muchia cubului are lungimea de 6 cm. . . . . 1 p

Se calculează pe rând: $ON = \sqrt{10}\ cm$, $NQ = 1\ cm$, ... 1 p

Avem din $\triangle OQN$: $\sin\widehat{NOQ} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ . . . . 1 p

Problema 4.

a) În spațiu avem 9 puncte astfel încât ele sunt situate pe patru drepte paralele cu dreapta ***a*** și de asemenea pe trei drepte paralele cu dreapta ***b***, dreptele ***a*** și ***b*** nefiind paralele. Să se demonstreze că punctele sunt coplanare.

b) Pe planul dreptunghiului *ABCD* se ridică perpendiculara *SA*. Fie *E* mijlocul segmentului $[SC]$.

i) Demonstrează că $\triangle DEB$ este isoscel.

ii) Dacă *M* este mijlocul segmentului $[BE]$, $SM \cap BC = \{N\}$, iar $BD \cap AN = \{P\}$, arată că $MP \parallel (SAD)$.

Soluție cu barem.

a) Fie dreptele b_1, b_2 și b_3 cele trei drepte paralele cu dreapta ***b***

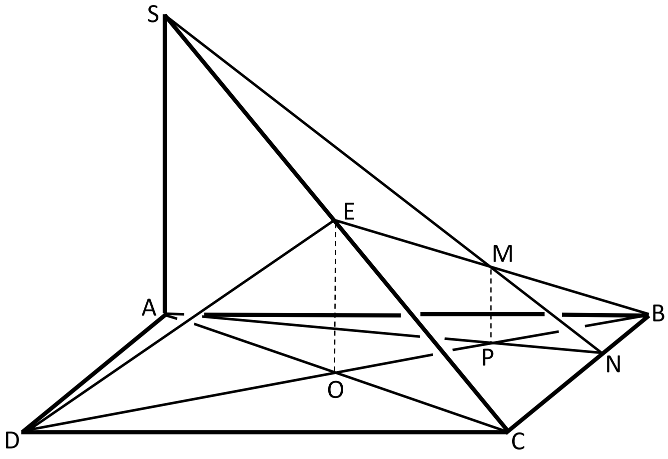
iar a_1, a_2, a_3 și a_4 cele patru drepte paralele cu dreapta ***a***

Pe una dintre dreptele a_i (fie aceasta a_1) sunt cel puțin 3 puncte . . . . 1 p

Aceste 3 puncte (împreună cu celelalte 6 puncte) trebuie să se găsească și pe 3 drepte paralele cu *b*. . . . . 1 p

Cum oricare dintre ele nu se pot găsi pe o dreaptă b_k dacă a_1 și b_k sunt necoplanare (deoarece $a_1 \nparallel b$), atunci obținem că cele 3 drepte b_1, b_2 și b_3 paralele cu b se intersectează cu a_1 în cele trei puncte.
Ceea ce înseamnă că toate punctele sunt coplanare. . . . . 1 p

b)



a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$
cum E este mijlocul segmentului $[SC]$ avem că $[EO]$ este linie mijlocie în $\triangle SAC$
Deci $EO \parallel SA$ iar $SA \perp (ABC)$
Prin urmare $EO \perp (ABC)$, adică $EO \perp BD$ . . 1 p
Astfel: $[EO]$ este mediană și înălțime în $\triangle DEB$, prin urmare $\triangle DEB$ este triunghi isoscel cu $[ED] \equiv [EB]$. . . . . 1 p

b)
$SA \perp (ABC), SA \subset (SAN) \Rightarrow (SAN) \perp (ABC)$
$EO \perp (ABC), EO \subset (EBD) \Rightarrow (EBD) \perp (ABC)$ . . . . 1 p
$(EBD) \cap (SAN) = MP$
$\Rightarrow MP \perp (ABC) \Rightarrow MP \parallel SA \quad MP \parallel (SAD)$ . . . . 1 p