Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a VII-a
Barem de corectare și notare

Problema 1

Se consideră numărul

$$A=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

unde $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*b) Pentru n = 2022 aflați valoarea lui **A** și rezolvați în* $\mathbb{R}_+$ *ecuația*

$$\sqrt{x}\cdot \boldsymbol{A}=\sqrt{x}-\frac{1}{17}$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Amplificând cu $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$) $\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2\right)}=$	*1p*
$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	*2p*
b) Aplicând egalitatea de la punctul a) avem: $A=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}}$	*1p*
$2023=7\cdot 17^2$ *și avem* $A=1-\frac{1}{17\sqrt{7}}$	*1p*
$\sqrt{x}\cdot A=\sqrt{x}-\frac{1}{17}\Leftrightarrow(A-1)\sqrt{x}=-\frac{1}{17}\Leftrightarrow-\frac{1}{17\sqrt{7}}\sqrt{x}=-\frac{1}{17}\Leftrightarrow$	*1p*
$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{17}\cdot\frac{17\sqrt{7}}{1}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{7}\Leftrightarrow x=7$	*1p*

Problema 2

Se consideră mulțimile:

$$A=\left\{n\in \boldsymbol{Z} \,/\, \sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}}\in \boldsymbol{Z}\right\} \quad \text{și} \quad B=\left\{x\in \boldsymbol{Q} \,/\, \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}\in \boldsymbol{Q}\right\}.$$

Să se determine mulțimea $\boldsymbol{A-B}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă n este par atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$, $\frac{n+1}{2n+1}\in \boldsymbol{Z}$ rezultă **2n+1 | n+1,** iar din **2n+1 | 2(n+1)-(2n+1)** rezultă **2n+1 | 1** , deci $\mathbf{n}\in\{-1;0\}$.	1p
Dar **n** este par, deci **n = 0** . Pentru **n = 0** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}}=\sqrt{1}=1$ deci $\mathbf{0}\in \mathbf{A}$	1p
Dacă n este impar atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1}=\frac{n-1}{2n+1}$, $\frac{n-1}{2n+1}\in \boldsymbol{Z}$ rezultă **2n+1 | n-1, iar din 2n+1 | 2(n-1)-(2n+1)** rezultă **2n+1 | -3** , deci $\mathbf{n}\in\{-2;-1;0;1\}$	1p
Dar **n** este impar , deci $\mathbf{n}\in\{-1;1\}$. Pentru **n = -1** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}}=\sqrt{2}\notin \boldsymbol{Z}$. Pentru **n = 1** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}}=0$, $0\in \boldsymbol{Z}$ deci $1\in$ **A** și **A** = {**0**; **1**}	1p
Pentru **x = 0** rezultă $\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{0+\sqrt{0+1}}=1$, $1\in \mathbf{Q}$	1p
Pentru **x = 1** rezultă $\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{1+\sqrt{1+1}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}\notin \mathbf{Q}$	1p
$\mathbf{0}\in \boldsymbol{B}, \mathbf{1}\notin \boldsymbol{B}$, deci **A− B** = {**1**}	1p

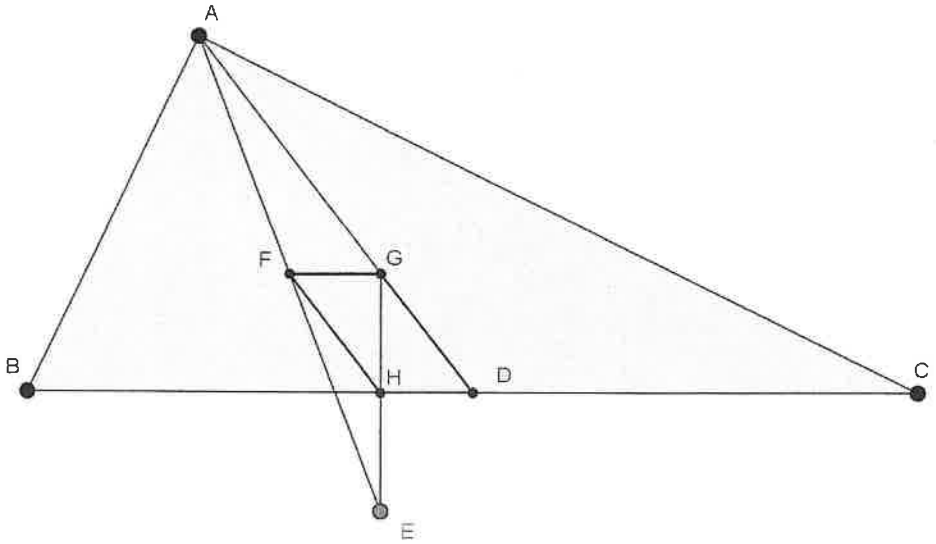
Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Problema 3

Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC, E simetricul lui G față de dreapta BC, F mijlocul segmentului AE, $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC.

a) Arătați că punctele G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Calculați aria ΔFGE în funcție de s, unde s este aria paralelogramului de la punctul a).



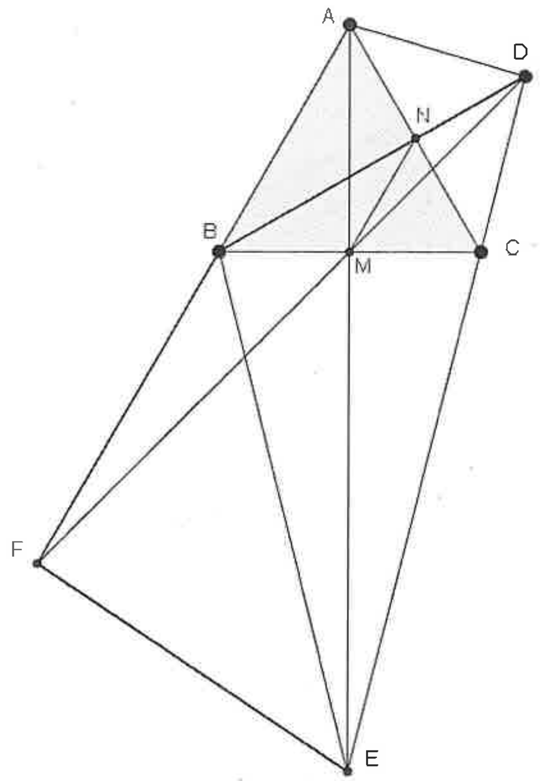
Detalii rezolvare	Barem asociat
a) E simetricul lui G față de dreapta BC, $\{H\} = GE \cap BC \Rightarrow H$ mijlocul lui GE, dar F mijlocul segmentului $AE \Longrightarrow FH$ linie mijlocie în $\Delta\, EAG \Longrightarrow FH \parallel AG$ și $FH = \frac{AG}{2}$	2p
G centrul de greutate în $\Delta\, ABC$ și AD mediană $\Longrightarrow GD = \frac{AG}{2} = FH$	1p
Cum $FH \parallel AG, G \in AD \Rightarrow FH \parallel GD$ și $FH = GD \Longrightarrow DGFH$ paralelogram	1p
b) H mijlocul segmentului $GE \Longrightarrow FH$ mediană în $\Delta\, EFG \Rightarrow A_{FGH} = \frac{A_{FGE}}{2}$	1p
$DGHF$ paralelogram $\Longrightarrow A_{FGH} = \frac{A_{DGFH}}{2} = \frac{s}{2}$	1p
Deci $A_{FGE} = 2A_{FGH} = 2 \cdot \frac{s}{2} = s$.	1p

Problema 4

*Fie triunghiul echilateral **ABC**, punctul **M** mijlocul laturii **BC** și punctul **D** aflat pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle \boldsymbol{ABC}$ astfel încât $\sphericalangle \boldsymbol{BDM} = 15°$.*

a) Aflați $\sphericalangle \boldsymbol{ADC}$.

*b) Dacă **E** este punctul de intersecție al dreptelor **DC** și **AM**, iar **F** punctul de intersecție al dreptelor **AB** și **MD**, demonstrați că **BD** = **EF**.*

Detalii rezolvare	Barem asociat
	*1p*
a) Fie N mijlocul laturii AC. Atunci $\boldsymbol{BN \perp AC}$ și $\boldsymbol{MN \parallel AB}$, deci $\sphericalangle \boldsymbol{DNM} = \sphericalangle \boldsymbol{DNC} + \sphericalangle \boldsymbol{CNM} = 90° + 60° = 150°$.	*1p*
Rezultă $\sphericalangle \boldsymbol{DMN} = 180° - \sphericalangle \boldsymbol{DNM} - \sphericalangle \boldsymbol{NDM} = 180° - 150° - 15° = 15°$, de unde $\boldsymbol{ND = MN}$	*1p*
Reiese $\boldsymbol{ND = NA = NC}$, deci $\Delta \boldsymbol{ADC}$ este dreptunghic, iar $\sphericalangle \boldsymbol{ADC} = 90°$.	*1p*
b) Din $\sphericalangle \boldsymbol{DBF} = 30° + 120° = 150°$ reiese $\sphericalangle \boldsymbol{DFB} = 15°$, deci $\boldsymbol{DB = BF}$.	*1p*
Mediatoarea segmentului BC este AM, $\sphericalangle \boldsymbol{EBC} = \sphericalangle \boldsymbol{ECB} = 180° - 60° - 45° = 75°$, de unde $\sphericalangle \boldsymbol{EBF} = 120° - 75° = 45°$. (1)	*1p*
Patrulaterul $\boldsymbol{ADEF}$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle \boldsymbol{EAF} = \sphericalangle \boldsymbol{EDF} = 30°$ și este convex. Rezultă $\sphericalangle \boldsymbol{EFA} = 180° - \sphericalangle \boldsymbol{EDA} = 90°$ de unde, folosind (1), $\sphericalangle \boldsymbol{EBF} = \sphericalangle \boldsymbol{BEF}$, deci $\boldsymbol{EF = FB = BD}$.	*1p*