



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 26 februarie 2016

Clasa a VIII-a

Soluții și bareme

1. Ecuația se poate scrie sub forma:

$$\frac{x^2 - 2016 + 12}{12} + \frac{x^2 - 2016 + 4}{4} = \frac{x^2 - 2016 + 2012}{2012} + \frac{x^2 - 2016 + 2004}{2004} \Leftrightarrow \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2016}{12} + 1 + \frac{x^2 - 2016}{4} + 1 = \frac{x^2 - 2016}{2012} + 1 + \frac{x^2 - 2016}{2004} + 1 \Leftrightarrow \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2016) \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2004} \right) = 0 \quad (1) \quad (1p)$$

Din  $\frac{1}{12} > \frac{1}{2012}, \frac{1}{4} > \frac{1}{2004}$  deducem că  $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2004} > 0$  (1p)

deci  $x = \pm\sqrt{2016} = \pm 12\sqrt{14}$  (1p)

2. Avem  $n^2 + 7n + 7 < n^2 + 8n + 16 \Leftrightarrow n^2 + 7n + 7 < (n+4)^2$  (1p)

Determinăm  $n$  pentru care  $n^2 + 7n + 7 > (n+3)^2$  (1) (2p)

(1)  $\Leftrightarrow n > 2$ . Deci, pentru  $n > 2$ , avem  $(n+3)^2 < n^2 + 7n + 7 < (n+4)^2 \Rightarrow$  (1p)

$a \notin Q$  și  $[a] = n+3$  (2p)

Pentru  $n \leq 2$ ,  $n$  impar, avem  $n = 1$ , iar  $a = \sqrt{15} \notin Q$  și  $[a] = 3$  (1p)

3. a) Demonstrăm că  $PM \perp AB$ .  $\mathcal{A}_{\Delta PAB} = \frac{AB \cdot PM}{2} \Rightarrow PM = 6\sqrt{2}$  cm (2p)

În  $\Delta PCM$ ,  $m(\angle PCM) = 90^\circ$ ,  $CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$  cm  $\Rightarrow CP = 6$  cm. (1p)

$A'C' \parallel AC \Rightarrow \angle(AC, C'M) = \angle(A'C', C'M)$

Fie  $MN \perp AC$ ,  $M \in AC$ . Dar  $CC' \perp (ABC)$ ,  $AC \subset (ABC) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CC' \perp MN$ . Deducem că  $MN \perp (ACC')$ .

Fie  $NQ \perp A'C'$ ,  $Q \in A'C'$ . Aplicând teorema celor trei perpendiculare, obținem că  $MQ \perp A'C'$ . (2p)

În  $\Delta AMN$ ,  $m(\angle ANM) = 90^\circ$ ,  $AM = \frac{AB}{2}$ ,  $m(\angle NAM) = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = 3$  cm,  $AN = \sqrt{3}$  cm  $\Rightarrow QC' = 3\sqrt{3}$

În  $\Delta QMN$ ,  $m(\angle QNM) = 90^\circ \Rightarrow QM = 3\sqrt{17}$  (1p)

În  $\Delta QMC'$ ,  $m(\angle C'QM) = 90^\circ \Rightarrow C'M = 6\sqrt{5}$  cm,

$\sin(\angle(A'C', C'M)) = \sin(\angle(MC'Q)) = \frac{\sqrt{85}}{10}$ . (1p)

