

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ – 26.02.2016
Clasa a VII-a
-barem-1. a) Dacă $1 < a < \sqrt{2}$, să se calculeze

$$E = \sqrt{(a - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2a - \sqrt{3})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}|.$$

b) Pentru $x > y$ și $n = \frac{\sqrt{xy}}{3\sqrt{2}} \in \mathbb{N}^*$, aflați valoarea lui $n^2 + n + 1$ **SOLUȚIE ȘI BAREM DE NOTARE:**

a) $E = |a - \sqrt{2}| + |2a - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{2} - a + 2a - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = a \Rightarrow E = a$
(2p)

b) Din $n = \frac{\sqrt{10x+y}}{\sqrt{18}} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2 = \frac{10x+y}{18}$ (1p)

Cum în plus $10x + y < 99$ și $x > y$ singura posibilitate este $n^2 = 4$ (2p)

$10x + y = 72 \Rightarrow x = 7$ și $y = 2$ deci $n = 2$ (1p)

Așadar $n^2 + n + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$ (1p)

2. Se dau numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2016}}$,
 $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$ și $c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1$. Arătați că c este pătrat perfect.

S:E 15.144 Supliment G.M. nr.4/ 2015

SOLUȚIE ȘI BAREM DE NOTARE:

$$\sqrt{3} \cdot a = \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \dots + \sqrt{3^{2016}} + \sqrt{3^{2017}} \quad (1p)$$

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \dots + \sqrt{3^{2016}}$$

Scăzând cele două relații obținem:

$$a \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \dots + \sqrt{3^{2016}} + \sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3} - \sqrt{3^2} - \sqrt{3^3} - \sqrt{3^4} - \dots - \sqrt{3^{2016}}$$

(1p)

$$a \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \quad (0,5p)$$

$$3 \cdot b = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} + 3^{2017}; \quad b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016} \quad (0,5p)$$

Scăzând cele două relații obținem: $b = \frac{3^{2017}-3}{2}$ (0,5p)

$$c = \frac{\frac{3^{2017}-3}{2}}{\frac{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3^{2017}-3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow c = \frac{3^{2017}-3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow c =$$

$$\frac{3 \cdot (3^{2016}-1)}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3^{2016}}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3^{2016}-1}{\sqrt{3^{2016}}-1} - 1$$

(2p)

$$c = \frac{1+3^{2016}-1-\sqrt{3^{2016}}}{\sqrt{3^{2016}}-1} = \frac{3^{2016}-3^{1008}}{3^{1008}-1} = 3^{1008} = (3^{504})^2 \Rightarrow c \text{ este pătrat perfect} \quad (1,5p)$$

3. În dreptunghiul $ABCD$ perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează pe (AB) în M și pe AD în P . Să se arate că:

- a) $DM \perp PB$;
- b) $DB \cdot DC = DA \cdot PC$

În $\triangle BDP$, $BA \perp PD$,

$PM \perp BD$ (2p) $\Rightarrow M$ este ortocentrul triunghiului $\triangle BDP \Rightarrow DM \perp$

PB (1p)

Din asemănarea triunghiurilor $\triangle ABD$ și $\triangle DPC$ (2p) $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{PC} \Rightarrow BD \cdot DC = AD \cdot PC$ (1p)

Se acordă (1p) pe desenul corect.

