



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ – 26.02.2016
Clasa a VI-a
-barem-

1) Să se arate că:

a) numărul $A = 5 + 5^2 + 5^3$ este divizibil cu 31;

b) numărul $B = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2017}$ este divizibil cu 775.

Soluție:

a) $A = 5 \cdot (1 + 5 + 5^2)$ 1p

$A = 5 \cdot 31 \Rightarrow A : 31$ 1p

b) $B = 5 \cdot (5 + 5^2 + \dots + 5^{2016})$ 1p

în paranteză putem grupa câte trei termeni, 2016 este divizibil cu 3 1p

obținem, $B = 5 \cdot [5 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^4 \cdot (1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{2014} \cdot (1 + 5 + 5^2)]$ 1p

din factor comun $\Rightarrow B = 5^2 \cdot (1 + 5 + 5^2) \cdot (1 + 5^3 + \dots + 5^{2013})$ 1p

adică $B = 25 \cdot 31 \cdot (1 + 5^3 + \dots + 5^{2013}) = 775 \cdot (1 + 5^3 + \dots + 5^{2013})$ 1p

2) Fie a, b, c numere raționale pozitive, astfel încât $\frac{7}{a+11} + \frac{21}{3b+39} + \frac{35}{5c+85} + \frac{49}{7d+133} = 1,75$.

Să se arate că numărul $\frac{a+7}{a+11} + \frac{b+9}{b+13} + \frac{c+13}{c+17} + \frac{d+15}{d+19}$ este natural.

Soluție:

$\Rightarrow \frac{7}{a+11} + \frac{7}{b+13} + \frac{7}{c+17} + \frac{7}{d+19} = \frac{7}{4}$, $\frac{1}{a+11} + \frac{1}{b+13} + \frac{1}{c+17} + \frac{1}{d+19} = \frac{1}{4}$ 1p

$\frac{a+7}{a+11} = \frac{a+11-4}{a+11} = \frac{a+11}{a+11} - \frac{4}{a+11} = 1 - \frac{4}{a+11}$ 1p

analog $\frac{b+9}{b+13} = 1 - \frac{4}{b+13}$, $\frac{c+13}{c+17} = 1 - \frac{4}{c+17}$ și $\frac{d+15}{d+19} = 1 - \frac{4}{d+19}$ 3p

obținem $\frac{a+7}{a+11} + \frac{b+9}{b+13} + \frac{c+13}{c+17} + \frac{d+15}{d+19} = 4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{a+11} + \frac{1}{b+13} + \frac{1}{c+17} + \frac{1}{d+19} \right)$ 1p

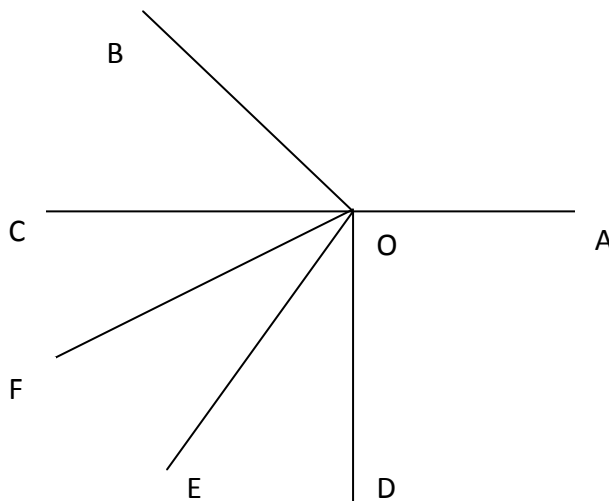
deci $\frac{a+7}{a+11} + \frac{b+9}{b+13} + \frac{c+13}{c+17} + \frac{d+15}{d+19} = 3 \in \mathbb{N}$ 1p

3) Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare și $m(\sphericalangle AOB) = 150^\circ$. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta AC și punctul B se iau semidreptele $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle DOB) = 120^\circ$, $[OE$ astfel încât $m(\sphericalangle EOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$ și $[OF$ astfel încât $\sphericalangle FOD \equiv \sphericalangle EOC$. Calculați măsurile unghiurilor EOB , DOC și BOF .

Supliment GM, noiembrie 2015

Soluție:

- $m(\sphericalangle AOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 30^\circ$ 1p
 $\Rightarrow m(\sphericalangle DOC) = 90^\circ$ 1p
 $\Rightarrow m(\sphericalangle EOC) = m(\sphericalangle FOD) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle EOD) = 30^\circ$ 1p
 desen caz 11p
 $\Rightarrow m(\sphericalangle FOC) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle BOF) = 60^\circ$ 1p



- desen caz 21p
 $\Rightarrow m(\sphericalangle FOC) = 150^\circ$ și $m(\sphericalangle BOF) = 180^\circ$ 1p

